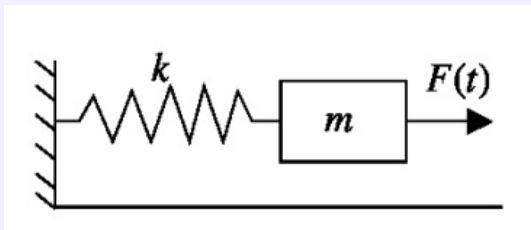


OMM - Oscilacije

May 15, 2023

Mehaničke oscilacije

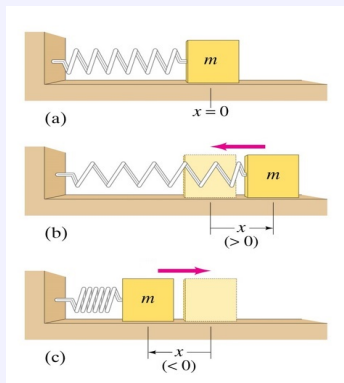


- Telo mase m oprugom vezano za nepokretni zid.
- Telo možemo posmatrati kao materijalnu tačku mase m .
- Opruga može da se pomera i na levo i na desno (sabija i razvlači).
- Na telo deluje neka spoljna sila $F(t)$.
- Telo se kreće levo i desno po nekoj podlozi sa otporom te podloge.
- Gravitacija ne igra ulogu.

Naći matematički model kretanja tela.

Telo

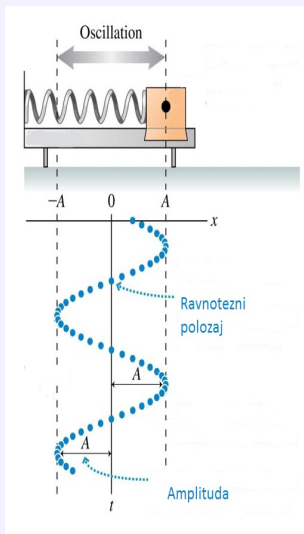
$x(t)$ - položaj tela na podlozi u trenutku t .



(a) Ravnotežan položaj (mirovanje) - koordinatni početak $x = 0$.

(b) Ako telo pomerimo na desno ($x > 0$) - deluje sila usmerena na levo.

(c) Ako telo pomerimo na levo ($x < 0$) - deluje sila usmerena na desno.



Oscilacije - kretanje tela oko položaja ravnoteže.

Period - Vremenski interval potreban telu da završi pun ciklus kretanja.

Frekvencija - Broj ciklusa po jedinici vremena.

Amplituda - Maksimalno pomeranje tela iz ravnotežnog položaja.

Neprigušene oscilacije - zanemarujemo trenje.

Prigušene oscilacije - ne zanemarujemo trenje.

Opruga

- Sila kojom opruga deluje na telo je proporcionalna otklonu tela od ravnotežnog položaja.
- k - koeficijent elastičnosti (proporcionalnosti) opruge.
- Pretpostavljamo da su pomeraju tela relativno mali u odnosu na oprugu.

Podloga

- Sila trenja podloge je proporcionalna brzini kretanja tela.
- c - koeficijent trenja.

Sila koja deluje na telo

- Drugi Njutnov zakon: $F = m \cdot a \Rightarrow F = mx''(t)$
- $-kx(t) - cx'(t) + F(t)$ (zbir sila koje deluju na telo)

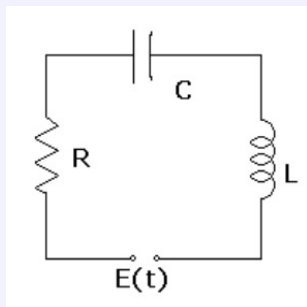
$$mx''(t) = -kx(t) - cx'(t) + F(t)$$

$$mx''(t) + cx'(t) + kx(t) = F(t)$$

(linearna DJ 2 reda sa konstantnim koeficijentima)

Napomena: Isti model se dobija i ukoliko telo okačeno oprugom za tavanicu pa se pomera gore-dole (otpor je otpor vazduha/fluida).

Električno kolo



- izvor struje sa naponom $E(t)$
- otpornik sa otporom R
- kondenzator kapacitivnosti C
- kalem induktivnosti L

Naći matematički model za količinu naelektrisanja u kolu (jačinu struje u kolu).

Otpornik

- Omov zakon: Struja koja prolazi kroz provodnik između dve tačke direktno je proporcionalna naponu na istim tačkama tog provodnika, a obrnuto proporcionalna njegovom električnom otporu.
- $i = \frac{v_R}{R}$ (i - jačina struje, v_R - napon, R - otpor)

Kondenzator

- Dve paralelne ploče bez kontakta. Naelektrisanje se nagomilava na tim pločama. Pozitivno naelektrisanje na jednoj ploči indukuje negativno naelektrisanje (proporcionalno toj jačini) na drugoj ploči.
- Napon na kondenzatoru je proporcionalan količini naelektrisanja (q), a obrnuto proporcionalan kapacitivnosti C , $v_c = \frac{q}{C}$.

Kalem (zavojnica)

- Proticanje struje kroz kalem stvara magnetno polje oko kalema. Električno polje indukuje magnetno i obrnuto: promena magnetnog polja indukuje struju u kalem.
- Induktivnost (L) je jednaka količniku napona (v_L) i promeni struje u vremenu ($\frac{di}{dt}$) $\Rightarrow v_L = L \cdot \frac{di}{dt}$

Ukupan napon

- Kirhofov zakon: zbir napona na svim elementima kola jednak je zbiru svih elektromotornih sila u tom kolu.

$$V_R + V_C + V_R = E(t)$$

$$iR + \frac{q}{C} + L \cdot \frac{di}{dt} = E(t) \quad //$$

(i - struja, q -naelektrisanje, struja je promena naelektrisanja po vremenu $\Rightarrow i = \frac{dq}{dt}$)

$$\frac{di}{dt}R + \frac{dq}{dt} + L \cdot \frac{d^2i}{dt^2} = \frac{dE}{dt}$$

$$L \cdot \frac{d^2i}{dt^2} + R \frac{di}{dt} + \frac{1}{C}i = \frac{dE}{dt}$$

Napomena: Analogno model po elektrisanju

$$L \cdot \frac{d^2q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q = E(t)$$

Mehanički model vs Električno kolo

$$mx''(t) + cx'(t) + kx(t) = F(t)$$

$$L \cdot \frac{d^2 i}{dt^2} + R \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} i = \frac{dE}{dt}$$

$$L \cdot \frac{d^2 q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{1}{C} q = E(t)$$

Mehanički model		Model električnog kola
masa m	\longleftrightarrow	induktivnost L
koeficijent trenja c	\longleftrightarrow	otpor R
koeficijent elastičnosti k	\longleftrightarrow	inverz kapaciteta $1/C$
spoljna sila F	\longleftrightarrow	elektromotorna sila E
položaj tela x	\longleftrightarrow	naelektrisanje q
brzina dx/dt	\longleftrightarrow	jačina struje $i = dq/dt$.

Nepriugušene oscilacije (nema otpora/trenja, $c = 0$)

$$mx''(t) + kx(t) = F(t)$$

Opšte rešenje: $x(t) = x_h(t) + x_p(t)$

Homogena: $mx''(t) + kx(t) = 0$

Opšte rešenje homogene jednačine (izvedeno na času):

$$\begin{aligned} x_h(t) &= C_1 \cos(\omega_0 t) + C_2 \sin(\omega_0 t) \\ &= C \cos(\omega_0 t - \gamma) \end{aligned}$$

$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ - ugaona/prirodna frekvencija

$C = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}$ - amplituda

$\tan \gamma = \frac{C_2}{C_1}$, γ - fazni pomak

(C i γ se određuju iz početnih uslova)

Nehomogena: $m \cdot x''(t) + k \cdot x(t) = F(t)$, $F(t) = F_0 \cos(\omega t)$

F_0 - amplituda

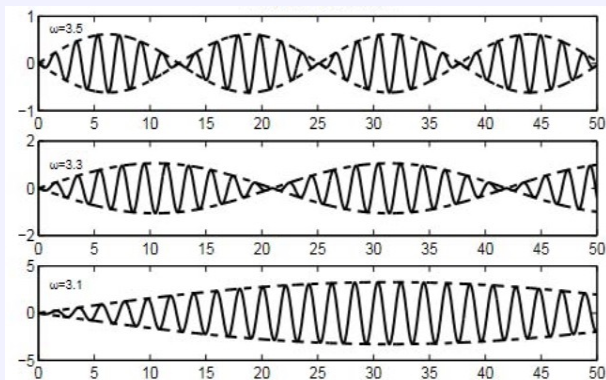
Opšte rešenje (izvedeno na času):

$$\omega \neq \omega_0 : x(t) = C \cos(\omega_0 t - \gamma) + \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \cos(\omega t)$$
$$\omega = \omega_0 : x(t) = C \cos(\omega_0 t - \gamma) + \frac{F_0}{2m\omega_0} t \sin(\omega_0 t)$$

Slučaj $w \neq w_0$

$$w \neq w_0 : x(t) = C \cos(w_0 t - \gamma) + \frac{F_0}{m(w_0^2 - w^2)} \cos(wt)$$

- Zbir 2 periodične funkcije \Rightarrow ograničena funkcija (ne mora biti periodična)
- $w_0 = 3$:

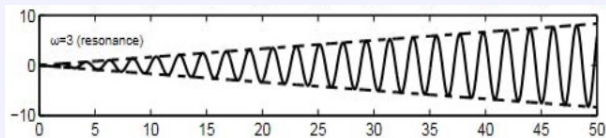


Što je w bliže w_0 to je maksimum veći i obvojnice imaju sve dužu periodu.

Slučaj $w = w_0$

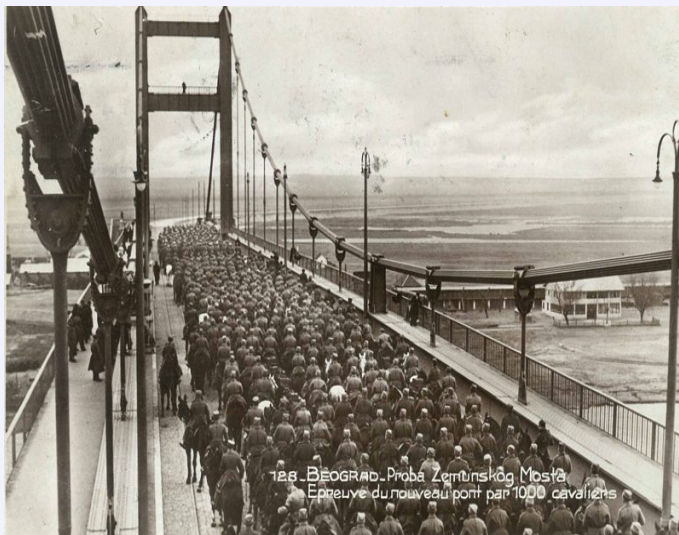
$$w = w_0 : x(t) = C \cos(w_0 t - \gamma) + \frac{F_0}{2mw_0} t \sin(w_0 t)$$

- Prvi sabirak jeste periodična i ograničena funkcija, ali drugi nije!
- Kad $t \rightarrow \infty \Rightarrow x(t) \rightarrow \infty$
- $x(t)$ oscilira ali teži u beskonačnost



Zaključak: Kada se u mehaničkom sklopu spoljna sila uskladi sa prirodnom frekvencom sistema, tada će amplitude sa kojim oscilira telo biti sve veće i veće.

Slučaj $w = w_0$ - rezonanca (ljudljaška, yo-yo,...)



128_BEOGRAD_Proba Zemunskog Mosta
Epreuve du nouveau pont par 1000 cavaliers



<https://nova.rs/svet/vetar-metro-troplo-vreme-uzroci-luljanja-neboder-a-u-kini/>

<https://www.youtube.com/watch?v=XggxeuFDaDU>

<https://www.youtube.com/watch?v=y2FaOJxWqLE>

<https://www.youtube.com/watch?v=5v5eBf2KwF8>

Prigušene oscilacije (imamo odpor/trenje $c > 0$)

$$mx''(t) + cx'(t) + kx(t) = F(t)$$

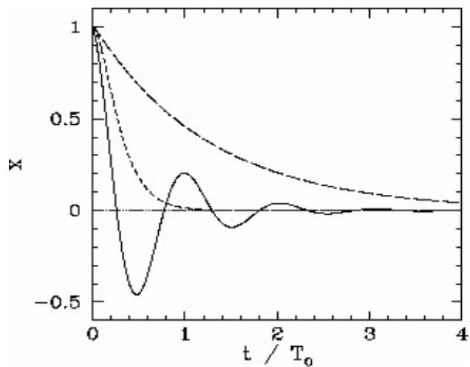
Smena: $w_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ (ugaona frekvenca), $p = \frac{c}{2m}$ (koeficijent prigušenja):

$$x'' + 2px' + w_0^2x = \frac{1}{m}F(t)$$

Homogena: $x'' + 2px' + w_0^2x = 0$

Opšte rešenje homogene (izvedeno na času):

$$x_h(t) = \begin{cases} C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t}, & c^2 > 4km, & p > \omega_0 \\ C_1 e^{-pt} + C_2 t e^{-pt}, & c^2 = 4km, & p = \omega_0 \\ e^{-pt}(C_1 \cos \omega_1 t + C_2 \sin \omega_1 t), & c^2 < 4km, & p < \omega_0 \end{cases}$$



- $p > w_0$
- $p = w_0$ - kritični faktor prigušenja
- $p < w_0$

Nehomogena: $x'' + 2px' + \omega_0^2 x = \frac{1}{m} F(t)$, $F(t) = F_0 \cos(\omega t)$

$$x_p = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)$$

$$A = \frac{(\omega_0^2 - \omega^2) F_0}{m(2\omega p)^2 + m(\omega_0^2 - \omega^2)^2}, \quad B = \frac{2\omega p F_0}{m(2\omega p)^2 + m(\omega_0^2 - \omega^2)^2} \cdot$$
$$C = \sqrt{A^2 + B^2} = \frac{F_0}{m\sqrt{(2\omega p)^2 + (\omega_0^2 - \omega^2)^2}}, \quad \tan \gamma = \frac{B}{A} = \frac{2\omega p}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

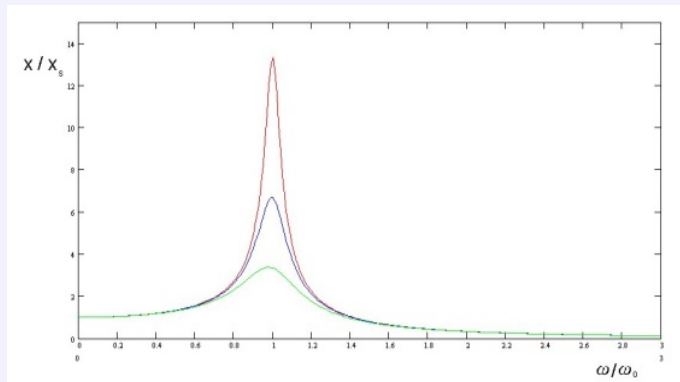
$$x_p(t) = \frac{F_0}{m\sqrt{(2\omega p)^2 + (\omega_0^2 - \omega^2)^2}} \cos(\omega t - \gamma)$$

Nema problema kada je $\omega = \omega_0$.

Opšte rešenje: $x(t) = x_h(t) + x_p(t)$

$x_h(t) \rightarrow 0$, $x_p(t)$ ograničena oscilujuća funkcija, maksimum dostiže za

$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - p^2}$ (izvedeno na času)



- x-osa: odnos w i w_0
- y-osa: odnos maksimuma pobudne sile i rešenja x_p